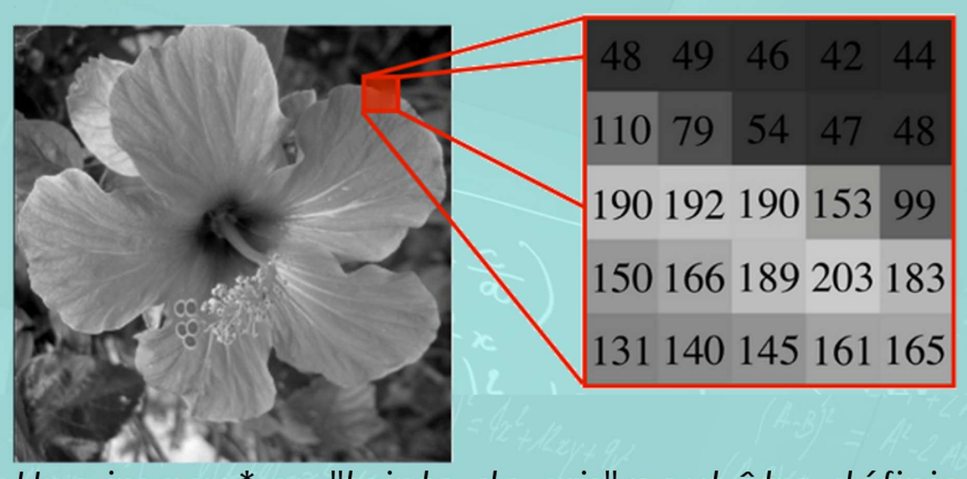
Premières applications des mathématiques au traitement d'image.

Les mathématiques sont très présentes dans le domaine de l'imagerie : l'imagerie médicale, satellite, la restauration de films, le traitement des images numériques, la compression d'images… Regardons plus particulièrement l'exemple du traitement des images numériques.

Eclaircir, assombrir des images en noir et blanc

Les images en noir et blanc peuvent être représentées par un tableau de valeurs. Chaque case de ce tableau est un nombre variant de 0 à 255, il correspond au niveau de gris d'un pixel. Le 0 correspond au noir et le 255 au blanc. Ainsi les pixels encadrés en rouge de l'image ci-contre correspondent au tableau de valeurs.



Une image en "teinte de gris" peut être définie par un tableau de valeurs*

La fonction racine carrée éclaircit

$x \longmapsto \sqrt{255.x}$

La fonction carrée assombrit

$x \longmapsto \frac{x^2}{255}$

Pour éclaircir une image, il faut augmenter la valeur de chaque pixel et à l'inverse, pour assombrir, il faut en diminuer la valeur. Mais pour garder la cohérence de l'image, il faut toujours utiliser une fonction f : [0,255]→[0,255] croissante.
De la même manière que les fonctions carrée et racine carrée, on utilise différentes fonctions pour optimiser le contraste des images.

Déterminer les contours d'une image

Les contours correspondent à des variations rapides du niveau de gris des pixels. La notion de variation est souvent exprimée par la dérivée. Dans notre cas, deux dérivées partielles sont approchées par des taux d'accroissements :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \approx \frac{f(x+1,y)-f(x-1,y)}{2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \approx \frac{f(x,y+1)-f(x,y-1)}{2}$$

Ces très fortes variations peuvent être identifiées en cherchant les extrema locaux du gradient ou encore en cherchant les zéros du Laplacien :

$$\overrightarrow{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Il existe différents filtres permettant d'analyser les images et de déterminer l'emplacement soit des extrema locaux du gradient, soit des zéros du Laplacien. On obtient à l'aide de la méthode de Sobel basée sur l'analyse du gradient et la méthode du Laplacien les résultats suivants :

Photo originale **

Contour déterminé grâce à la méthode de Sobel

Contour déterminé grâce à la méthode du Laplacien

Flouter une image

Grossièrement, faire un flou, c'est calculer une moyenne (pondérée) de pixels voisins en utilisant une matrice de convolution. Le voisinage d'un point est au minimum la croix formée par 5 points (C,O,N,E,S).
Suivant la matrice de convolution choisie, le flou obtenu révèle des propriétés visuelles particulières. Par exemple, le flou gaussien (illustration ci-contre) est obtenu avec cette matrice 5x5 :

$$\forall -2 \leq i,j \leq 2,\ M_{i,j} = \exp\left(-\frac{i^2+j^2}{2\sigma^2}\right)$$

On peut faire une analogie entre cette technique de flou et l'utilisation d'une intégrale pour lisser un signal 2D bruité : $\int_{x-h}^{x+h}\int_{y-h}^{y+h} w.f\ d\mu$
où h est proche de 0 et w est une fonction poids.

Image originale

Image "floutée"

*Images : * Maïtine Bergounioux : http://images.math.cnrs.fr/Le-traitement-numerique-des-images.html*
*** Bruno Nazarian : http://bnazarian.free.fr/MyUploads/IN_GBM_04_CONTOURS.PDF*

Conception graphique :
étudiants de L3 Maths, LMA Poitiers, promotion 2012-2013.