Université de Poitiers Année 2012-2013
M1 EFM

Exercices d'Analyse

Exercice 1 1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ $r.x \notin \mathbb{Q}$.

2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. En déduire : entre 2 nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel. (On pourra utiliser la propriété : pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n tel que $n > a$.)

Exercice 2 Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ?
$a = 1/3$, $b = 1/15$, $c = 1/25$, $d = 1/125$, e, $f = 0,333\cdots3\cdots$, $g = \sqrt{2}$,
$h = 0{,}123\,456\,789\,123\,456\,789\,123\cdots$, $i = 0{,}123\,456\,789\,101\,112\,131\,4\cdots$, $j = \pi$, $k = 13/7$, $l = 27/17$.

Exercice 3 On considère les nombres rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$. Y a-t-il un nombre rationnel juste avant $\sqrt{2}$, plus grand que tous les nombres rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$?
Une suite de nombres rationnels a-t-elle pour limite un nombre rationnel ?
Une suite de nombres décimaux a-t-elle pour limite un nombre décimal ?

Exercice 4 Soient a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.

Exercice 5 1. Soit $N_n = 0,1997\,1997\ldots1997$ (n fois). Mettre N_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $M = 0,1997\,1997\,1997\ldots\ldots$ Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M.
3. Même question avec : $P = 0,11111\ldots + 0,22222\ldots + 0,33333\ldots + 0,44444\ldots + 0,55555\ldots + 0,66666\ldots + 0,77777\ldots + 0,88888\ldots + 0,99999\ldots$

Exercice 6 Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 7 Le maximum de 2 nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des 2) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des 2 nombres x, y. Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 8 Déterminer la borne supérieure et inférieure (éventuellement infinies) de : $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Exercice 9 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q}\ ,\ ]0, 1[\cap\mathbb{Q}\ ,\ \mathbb{N}\ ,\ \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 10 Soit E l'ensemble des réels de la forme $\frac{n-1/n}{n+1/n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble E admet-il une borne inférieure, une borne supérieure, un plus grand élément, un plus petit élément ?

Exercice 11 Soit $E = \{\frac{1}{n} \cos n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$; calculer $\inf E$ et $\sup E$.

Exercice 12 Soit $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ une famille non vide et bornée de réels ; comparer :

$$\inf_i(\sup_j a_{ij}) \quad \text{avec} \quad \sup_j(\inf_i a_{ij}).$$

Exercice 13 Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ d'au moins deux éléments et x un élément de A.

1. Montrer que si $x < \sup A$, alors $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.
2. Montrer que si $\sup(A \setminus \{x\}) < \sup A$, alors $x = \sup A$.

Exercice 14 Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b \mid (a,b) \in A\times B\}$.

1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 15 Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. **Vrai** ou **faux** ?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$,
2. $B \subset A \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$,
3. $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leqslant \sup(A + B)$.

Exercice 16 Soit A l'ensemble des nombres réels qui peuvent s'écrire $x = \frac{2p^2-3q}{p^2+q}$ pour p et q entiers vérifiant $0 < p < q$.

1. Montrer que A est minorée par -3 et majorée par 2.
2. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$ (pour la borne supérieure on pourra prendre $q = p + 1$).

Exercice 17 Soient x et y deux réels strictement positifs. On pose

$$a = \frac{x+y}{2} \qquad g = \sqrt{xy} \qquad h = \frac{2xy}{x+y} \qquad q = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

Montrer que a, g, h, q sont rangés dans un ordre indépendant de x et y.

Exercice 18 Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. Enoncer un résultat analogue pour $\inf(A \cup B)$.
3. Qu'en est-il pour $A \cap B$?

Exercice 19 Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 2$ l'implication

$$[x > -1, x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1 + nx]$$

est vraie.

Exercice 20 Soient $a_1, \dots, a_n,\ b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, les a_i n'étant pas tous nuls. Soit $p(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + xb_i)^2$. Montrer que le discriminant de cette équation du second degré est $\leqslant 0$. En déduire que :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2},$$

et que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

Exercice 21 Si a et b sont des réels $\geqslant 0$, montrer que :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b}.$$

Exercice 22 Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ montrer que :

$$2xy \leqslant \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2.$$

Exercice 23 Soit deux nombres réels a et b vérifiant : $-1 < a < 4$ et $-3 < b < -1$. Donner un encadrement de $a - b$ et de a/b.

Exercice 24 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) = nf(1)$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z} \qquad f(n) = nf(1)$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q} \qquad f(q) = qf(1)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = xf(1)$ (on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour encadrer x par des rationnels de plus en plus proches de x).

Exercice 25 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in [0, 1]^n$, montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Exercice 26 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes :
• Si $(u_n)_n$ converge vers un réel l alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite l, il en est de même de $(u_n)_n$.

Exercice 27 Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 28 Étudier la suite $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, a et b étant donnés dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 29 Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.
3. Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
4. Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.

5. Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.

Exercice 30 Soit l un nombre réel. Peut-on dire qu'une suite qui vérifie

$$\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ |u_n - l| < \varepsilon$$

converge vers l ?

Exercice 31 Construire une suite $u_n = v_n w_n$ (resp. $v_n + w_n$) convergente et telle que l'une au moins des suites (v_n) et (w_n) diverge.

Exercice 32 Vrai ou faux : il existe une suite (u_n) telle que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0 et qui diverge.

Exercice 33 Encadrer la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 34
1. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$?
2. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = 1$?
3. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = +\infty$?

Exercice 35 Étudier la convergence des suites :

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n} \qquad \frac{n\sin(n)}{n^2+1} \qquad \frac{1}{n} + (-1)^n \qquad n\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

Exercice 36 Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang.

Exercice 37 Soit $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que $\forall n > 0 \quad \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclusion ?

Exercice 38 Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

Exercice 39 Montrer que (u_n) converge ssi (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n}) convergent (leurs limites n'étant pas nécessairement égales).

Exercice 40 Etudier la convergence de la suite $u_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$.

Exercice 41 Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos \dfrac{2n\pi}{q}$.

1. montrer que $u_{n+q} = u_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite u_n n'a pas de limite.

Exercice 42 Montrer que pour $n \geqslant 1$, l'équation $x^n + x^{n-1} + x^2 + x - \frac{n+1}{n} = 0$ admet une unique racine positive ; on la note u_n. Étudier la suite (u_n).

Exercice 43 Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que (u_n) est croissante et majorée.
2. Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif l qui vérifie $l^2 - l - 1 = 0$ et calculer l.

Exercice 44 Étudier les suites :

1. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Exercice 45 (Examen 2000) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leqslant x_n < 1/2$ pour tout $n \geqslant 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers α.

Exercice 46 Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{(u_n - 3)^2}{4}$.

Exercice 47 Soient a et b deux réels strictement positifs ; on définit une suite (u_n) par :

$$u_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{a u_n + b}$$

1. Montrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle cette suite est stationnaire.
2. Montrer que si u_0 est distinct de cette valeur, (u_n) est monotone et bornée. Trouver $\lim_{n \to \infty} u_n$.

Exercice 48 Étudier suivant les valeurs données à u_0 appartenant à $\mathbb{C}$ les suites :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n - 2}{u_n + 4} \\ u_{n+1} &= \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \\ u_{n+1} &= \frac{-1}{u_n + 1} \end{aligned}$$

Exercice 49 Soit $f \colon [0,1] \to [0,1]$. On considère $a \in [0,1]$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. Si f est croissante, alors (u_n) est croissante.
2. Si (u_n) est croissante, alors f est croissante.
3. Si (u_n) est croissante et f monotone, alors f est croissante.
4. Si (u_n) converge vers une limite l, alors l est point fixe de f.
5. Si f est dérivable, alors (u_n) est bornée.
6. Si le graphe de f est au dessus de la droite d'équation $y = x$, alors (u_n) est croissante.
7. Si (u_n) converge vers un point fixe l de f, alors f est continue en l.

Exercice 50 Étudier la suite définie par $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$ (discuter suivant les valeurs de u_0).

Exercice 51 Calculer, lorsqu'elles convergent, les limites des suites définies par :
$u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ $\quad u_n = \sqrt{n(n+a)} - n$ $\quad u_n = \dfrac{n}{2} \sin \dfrac{n\pi}{2}$ $\quad u_n = \dfrac{\sin n^2 - \cos n^3}{n}$.

Exercice 52 Etudier la limite des suites suivantes : $a_n = \cos(\dfrac{2^n}{n!})$; $b_n = \sqrt[n]{3 - \sin n^2}$; $c_n = \dfrac{n^3 + 2^n}{3^n}$; $d_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + \sqrt{n}}$; $e_n = (\cos n) \sin \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 53 (Méthode d'Héron) Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que
$$u_{n+1}{}^2 - a = \frac{(u_n{}^2 - a)^2}{4u_n{}^2}.$$
2. Montrer que si $n \geqslant 1$ alors $u_n \geqslant \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}{}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
5. Si $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$ et pour $n \geqslant 1$ montrer que
$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$
6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Exercice 54 On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Exercice 55 1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geqslant a > 0$) :
$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \qquad \text{et} \qquad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer que $u_n \leqslant v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Exercice 56 Que penser-vous de l'énoncé suivant : si $(u_n) \sim (v_n)$ alors $(e^{u_n}) \sim (e^{v_n})$. Donner un énoncé correct.

Exercice 57 1. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \neq 0$ et si $(u_n) \to 0$ alors $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.

2. Soit a un réel. Déterminer la limite de $(1 + \dfrac{a}{n})^n$.

Exercice 58 Comparer les suites suivantes :
$$a_n = n^n, \qquad b_n = n^{\ln(n)}, \qquad c_n = e^{n^2}, \qquad d_n = (\ln n)^{n \ln n}$$

Exercice 59 Montrer la réciproque du théorème de Césaro (i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$) :

1. dans le cas où $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$ et
$$u_{n+1} - u_n = O(\frac{1}{n}),$$
2. dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 60 Montrer que si une fonction f définie sur $E \subset \mathbb{R}$ est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est, elle aussi, continue en x_0. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 61 1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$.

2. Soient m, n des entiers positifs. Étudier $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$.
3. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 62 Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 dans son intérieur. On suppose que $\lim_{x\to x_0} f(x) = u > 0$. Démontrer qu'il existe $t > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < t$ alors $|f(x)| \geqslant \frac{u}{2}$.

Exercice 63 Soit f une fonction de variable réelle telle que $\frac{f(x)}{|x|} \to \infty$ quand $x \to \infty$. Montrer que pour tout réel α il existe X_α tel que $f(x) - |\alpha x| \geqslant |x|$ si $|x| \geqslant X_\alpha$. En déduire que pour tout α réel $f(x) - \alpha x \to \infty$ quand $x \to \infty$.

Exercice 64 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

1. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$
2. Montrer que si $L > 0$,
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

Exercice 65

1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 66 Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels de degré respectif d et d'. Etudier suivant les valeurs de d et d', et éventuellement de certains des coefficients de P et Q,

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)/Q(x).$$

Exercice 67 Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x\to0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} \qquad \text{d)} \quad \lim_{x\to4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$$

$$\text{e)} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \qquad \text{f)} \quad \lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)$$

Exercice 68 On rappelle les limites : $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
Calculer les limites suivantes :

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to0^+} \sqrt{x}.\sin\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x\to0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} \qquad \text{d)} \quad \lim_{x\to0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x^2}$$

$$\text{e)} \quad \lim_{x\to0} x\frac{\tan x}{\cos^2 x - 1} \qquad \text{f)} \quad \lim_{x\to0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3(\frac{x}{2})}$$

Exercice 69 Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1. $\lim_{x\to0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln x}$
2. $\lim_{x\to0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$
3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$

5. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
6. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{\ln(x+1)}$
7. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
8. $\lim_{x\to (-1)^+} (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$
9. $\lim_{x\to 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3-8)$
10. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)}$
11. $\lim_{x\to +\infty} (x\ln x - x\ln(x+2))$
12. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$
13. $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$
14. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$
15. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
16. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$
17. $\lim_{x\to 0^+} \big(\ln(1+x)\big)^{\frac{1}{\ln x}}$
18. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$
19. $\lim_{x\to +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$
20. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

Exercice 70 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1};\ \lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x^p-a^p}\ (a>0, m,p\in\mathbb{N}^*);\ \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n-x^n}{h}\ (x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right);\ \lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x+\sin x}{4x+\pi};\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}.$$

Exercice 71 Déterminer les limites suivantes :

$$\frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})} \quad \text{en } 0$$

$$\frac{x^3-3x^2+5x-3}{4x^4+x^2+x-6} \quad \text{en } 1$$

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} \quad \text{en } 0$$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{x^2+4}+x-2} \quad \text{en } 0$$
$$\frac{1-\cos x}{x^2} \quad \text{en } 0$$
$$\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1} \quad \text{en } \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})-1}{\sqrt{3}-2\cos(x+\frac{\pi}{6})} \quad \text{en } 0$$

Exercice 72 Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$ telle que pour tout x et x' ($x \neq x'$) de $[a,b]$ on ait : $|f(x)-f(x')| < |x-x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une et une seule solution dans $[a,b]$. (On pourra introduire la fonction : $x \mapsto g(x)=f(x)-x$).

Exercice 73 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$. Montrer que f s'annule. Appliquer ceci aux polynômes de degré impair.

Exercice 74 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ continue telle que $f(0)=1$, $\lim\limits_{-\infty} f=0$ et $\lim\limits_{+\infty} f=0$.

1. Montrer qu'il existe $a>0$ tel que si $|x|>a$ alors $f(x)\leqslant\frac{1}{2}$.
2. Montrer que f est bornée et possède un maximum.

Exercice 75 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ continue telle que $\forall x\in I, f(x)^2=1$. Montrer que $f=1$ ou $f=-1$.

Exercice 76 Soient f et g continues sur $[0,1]$ telles que $\forall x\in[0,1]\ f(x)<g(x)$. Montrer qu'il existe $m>0$ tel que $\forall x\in[0,1]\ f(x)+m<g(x)$.

Exercice 77 Soit f croissante sur $[a,b]$ et prenant toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$. Montrer que f est continue.

Exercice 78 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 79 Une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?

Exercice 80 On admet que pour tout $x\in\mathbb{R}, |\sin x|\leqslant|x|$.

1. Montrer que $x\mapsto\sin x$ est continue en 0 puis sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. En déduire que $x\mapsto\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 81 Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$ si $x\neq0$, et $f_1(0)=0$;
2. $f_2(x)=\sin x\sin\frac{1}{x}$ si $x\neq0$, et $f_2(0)=0$;
3. $f_3(x)=xE(x)$;
4. $f_4(x)=E(x)\sin(\pi x)$.

Exercice 82 Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est strictement croissante puis que pour tout $y \in \;]-1,1[$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 83 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \sin(\frac{1}{x})\ ; \quad b)\ f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;$$
$$c)\ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

Exercice 84 Montrer que l'équation $x^7 - 3\,x^2 + 4\,x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1,1[$. Même question pour l'équation $x^{29} + 14\,x^{17} - 7\,x^5 + 2 = 0$.

Exercice 85 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{R}^+$. Démontrer en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires que le polynôme $P(X) = X^n - d$ a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 86 (Partiel Novembre 96) Soit

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}.$$

Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$.
Déterminer $\mathrm{Sup}_{\,x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 87
1. Soit la fonction $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. Montrer que f admet une réciproque que l'on explicitera.
2. Trouver un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction $g(x) = \tan(x^3)$ admette une fonction réciproque (on précisera alors le domaine de définition de cette réciproque et son image).

Exercice 88 Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas des polynômes :

$$x \to e^x, \quad x \to \ln x, \quad x \to \sqrt{x^2+1}, \quad x \to \cos x.$$

Exercice 89 On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $I = [a,b]$ converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathrm{N}, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur l'intervalle $[a,b]$, et que toutes les f_n sont continues. Montrer que $\forall x \in [a,b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et donner sa limite. Montrer que f est bornée et continue.
On ne suppose plus que $(f_n)_n$ converge uniformément mais seulement point par point (ie, $\forall x \in [a,b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $f(x)$) ; de plus toutes les f_n sont lipschitziennes de rapport k ; montrer que f est lipschitzienne de rapport k et qu'il y a converge uniforme.

Exercice 90 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \sin\frac{1}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \ \text{ si } x \neq 1 \qquad f_3(1) = 1.$$

Exercice 91 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 92 Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 93 Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions :

$$f(x) = \frac{2x-5}{(x-2)^2(x+1)(x-3)} \qquad g(x) = \ln(1+x).$$

Exercice 94 (Formule de Leibnitz) Étant données u et v des fonctions dérivables à l'ordre n sur l'intervalle I, montrer par récurrence que la dérivée d'ordre n du produit uv sur cet intervalle est :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

En déduire les dérivées successives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 e^x \quad ; \quad x \mapsto x^2(1+x)^n \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \quad ; \quad x \mapsto x^{n-1} \ln x.$$

Exercice 95 Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f : x \mapsto x|x|, \qquad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}, \qquad h :\mapsto \frac{1}{1+|x|}.$$

Exercice 96 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ sinon} \end{cases}$

Déterminer a, b, c pour que f soit C^2 (et C^3 ?).

Exercice 97 Soient a et b deux réels et $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$ et en déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

Exercice 98 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, f(0) = 0.$$

Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et calculer ses dérivées en 0.

Exercice 99 La fonction $x \to \cos \sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 100 Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = \left[\left(1-t^2\right)^n\right]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1, 1]$.

Exercice 101 Etudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 102 Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 103 Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a, b[$ s'annulant en $n+1$ points de $]a, b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue,il existe un point x_0 de $]a, b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 104 Étant donné y un réel positif et n un entier naturel pair, montrer que $(x+y)^n = x^n + y^n$ si et seulement si $x = 0$. Cas n impair ?

Exercice 105 Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n, n+1]$ montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 106 Étant donné α dans $]0, 1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \geqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \geqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}.$$

Exercice 107 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1-k)^3 x^2 + (1+k)x^3$ où k est un nombre réel. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'origine est un extremum local de f.

Exercice 108 Appliquer la règle de l'Hôpital aux calculs des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right),$$

$$\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) \text{cotan}\, x.$$

Exercice 109 Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^4) - 1}{x^4 e^x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx};$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \left(\exp \frac{1}{x} - \exp \frac{1}{x+1} \right).$$

Exercice 110 Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; f(x+y)f(x-y) \leqslant f(x)^2$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \; f(x)f''(x) \leqslant f'(x)^2$.

Exercice 111 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{+\infty} f' = l$. Montrer qu'alors $\lim_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$.

Exercice 112 Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 113 Quel est le lieu des points d'inflexion (puis des extrémums relatifs) de f_λ quand λ décrit $\mathbb{R}$, où :

$$f_\lambda : x \to \lambda e^x + x^2.$$

Exercice 114 Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall x \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Exercice 115 (Examen 2000) Enoncer le théorème de Rolle pour une fonction $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b[$. (Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.)
2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$
4. Application : Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{Arccos} x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 116 (Examen 2000) Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :
$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$
   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a
$$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

Exercice 117 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit
$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$
où P_n est un polynôme.
   (a) Trouver P_1 et P_2.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_n' pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que f est de classe C^∞.

Exercice 118 Soient les fonctions $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$ et $g : x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

1. Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Construire les graphes de f et g.

Exercice 119 Démontrer les inégalités suivantes :
$$\operatorname{Arcsin} a > \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{si } 0 < a < 1;$$
$$\operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2} \quad \text{si } a > 0.$$

Exercice 120 Écrire sous forme d'expression algébrique
$$\sin(\operatorname{Arccos} x), \quad \cos(\operatorname{Arcsin} x), \quad \sin(3 \operatorname{Arctan} x).$$

Exercice 121 Simplifier les expressions suivantes :
$$\operatorname{Arctan}(\tan x) \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}), \quad \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad (0 < x < 2\pi),$$
$$\operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Exercice 122 Vérifier
$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 123 Étudier la fonction :
$$\phi : x \to \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} + \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

Exercice 124 Calculer :
$$\lim_{x\to\infty} e^x(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} (x - \ln(\operatorname{ch} x)).$$

Exercice 125 Exprimer $\operatorname{ch}^n x$ et $\operatorname{sh}^n x$ au moyen de $\{\operatorname{sh} px, \operatorname{ch} px \; ; \; 1 \leqslant p \leqslant n\}$. Expliciter $\operatorname{ch}^5 x$ et $\operatorname{sh}^5 x$.

Exercice 126 Calculer les sommes

$$1+\operatorname{ch} x+\operatorname{ch} 2x+\cdots+\operatorname{ch} nx \quad \text{et} \quad 1+\operatorname{sh} x+\operatorname{sh} 2x+\cdots+\operatorname{sh} nx.$$

Exercice 127 Démontrer les inégalités :

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x) \text{ pour } x>0 \quad \text{et} \quad 1+x \leqslant e^x \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

Exercice 128 Soient $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ et $I_n=\int_a^b f(t)\sin(nt)dt$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n \to 0$.
2. Montrer que ceci est encore vrai si f est en escalier.
3. En déduire que le résultat subsiste pour f continue par morceaux.

Exercice 129 Soient $0<a\leqslant b$. Montrer que $\int_a^b \frac{dx}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Exercice 130 Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On définit $g : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \end{cases}$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que si f est périodique, g admet une limite en $+\infty$.

Exercice 131 Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \{0,...,n\}, \int_0^1 f(u)u^k du = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros distincts dans $]0,1[$.

Exercice 132 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que :

$$f(0)=0,\ f(1)=1.$$

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f^n(t)dt.$$

Exercice 133 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ $(a<b)$, et f continue positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(t)dt\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]}|f(t)|.$$

Exercice 134 Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. On suppose que f est monotone sur $[a,b]$ et que g est positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt + f(b)\int_c^b g(t)\,dt$$

(considérer $\varphi(x)=f(a)\int_a^x g(t)\,dt + f(b)\int_x^b g(t)\,dt$).

Exercice 135 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x^2+5} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} \quad ; \quad \int e^x \sin(e^x) dx \quad ; \quad \int \tan^3 x dx \quad ;$$

$$\int \frac{1}{\tan^3 x} dx \quad ; \quad \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m} dx,\ m \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad ; \quad \int \frac{\operatorname{ch} x\, dx}{\operatorname{sh}^5 x}.$$

Exercice 136 Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer I.

Résultat : $I = 2 - \pi/2$.

Exercice 137 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continûment dérivable. On considère les deux intégrales $I_1 = \int_a^b f(t)\, dt$ et $I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\, dt$.

1. Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Faire le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrale I_2.
3. Calculer I_2 en fonction de I_1.
4. Faire un dessin faisant apparaître f et f^{-1}, et interpréter ce résultat géométriquement.

Exercice 138 Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx\ n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int x \operatorname{Arctan} x dx \quad ; \quad \int (x^2+x+1) e^x dx.$$

Exercice 139 Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

Exercice 140 Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(a-x)(b-x)dx$.
2. En déduire un encadrement de $\int_a^b f(t)dt$ si $\forall x \in [a,b]\ m \leqslant f''(x) \leqslant M$.

Exercice 141 (Intégrales de Wallis) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
5. Calculer nI_nI_{n+1}.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

Exercice 142 Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k})$.

Exercice 143 Calculer par récurrence :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n u}.$$

Exercice 144 Calculer par récurrence :

$$J_n = \int_1^e \log(u)^n du.$$

Exercice 145 Calculer les primitives suivantes :

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 3x) dx \quad ; \quad \int \cos x \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \cos^6 x dx \quad ;$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx \quad ; \quad \int \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \sin^3 x \cos^2 x dx \quad ;$$

$$\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x dx \quad ; \quad \int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x dx \quad ; \quad \int \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x dx.$$

Exercice 146 Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

1. $\dfrac{1}{a^2 + x^2}$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
3. $\dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.
4. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.
5. $\dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.
6. $\dfrac{1}{(t^2 + 2t - 1)^2}$.
7. $\dfrac{3t + 1}{(t^2 - 2t + 10)^2}$.
8. $\dfrac{3t + 1}{t^2 - 2t + 10}$.
9. $\dfrac{1}{t^3 + 1}$.
10. $\dfrac{x^3 + 2}{(x+1)^2}$.
11. $\dfrac{x + 1}{x(x-2)^2}$.

12. $\dfrac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}$.
13. $\dfrac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}$.
14. $\dfrac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}$.
15. $\dfrac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

Exercice 147 Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}$.
2. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$.
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.
4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}$.
5. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx$.
6. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}$.
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx$.
8. $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx$.
9. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx$.
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,dx$.
11. $\displaystyle\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx$ pour $a\in\mathbb{R}$. Y a-t-il une limite quand $a\to+\infty$?
12. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1}$.

Exercice 148 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx \quad ; \quad \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x} \quad ; \quad \int \frac{\cos x}{1+\sin 2x}dx \quad ;$$

$$\int \frac{\tan x-\tan a}{\tan x+\tan a}dx \quad ; \quad \int \frac{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}dx.$$

Exercice 149 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} \quad ; \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} \quad ; \quad \int \frac{x}{\sqrt{9+4x^4}}dx \quad ;$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x+2}dx \quad ; \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}dx.$$

Exercice 150 Calculer les primitives suivantes.

1. $\displaystyle\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx.$
2. $\displaystyle\int \cos^5 t\,dt\,;\int \cosh^3 t\,dt\,;\int \cos^4 t\,dt\,;\int \sinh^4 t\,dt.$
3. $\displaystyle\int x^3 e^x\,dx.$
4. $\displaystyle\int \ln x\,dx\,;\int x\ln x\,dx\,;\int \arcsin x\,dx.$
5. $\displaystyle\int \cosh t\sin t\,dt.$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}.$
7. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$
8. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$
9. $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx\,;\int e^{ax}\sin bx\,dx.$
10. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,dx \quad \text{pour} \quad 0<x<1.$
11. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}.$
13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}} \quad \text{avec} \quad 0<x<a.$
14. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\cosh x+\sinh x}\,dx.$

Exercice 151 Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}, \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Exercice 152 Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \; ; \; \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} \; ; \; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \; ; \; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Calculer :

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$$

et donner un équivalent de $u_n - \ell$.

Exercice 153 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y + x$ avec $y(0) = 1$,
2. $y' = \cos x + y$,
3. $y' + 2y = (x-2)^2$.

Exercice 154 Pour chacune des équations différentielles qui suit : écrire la solution passant par le point M(.,.) et tracer sommairement le graphe de la solution.

1. $y' + 2xy = 0, \quad M = (0, 1)$,
2. $y' + y \tan x = \sin x \cos x \quad M = (\frac{\pi}{4}, 0)$,
3. $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$, On déterminera $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

Exercice 155 Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) + 2y(t) = 0$;
2. $\dfrac{dx}{dt} - x = 0$;
3. $y'(x) + 2y(x) = 0$ avec $(y - y')(0) = 0$.

Exercice 156 Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $(1 + x^2)y' - xy = 0$;
2. $y' + y \tan x = 0$, pour x dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Exercice 157 Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 2xy = x.$$

1. Résoudre l'équation homogène asociée.
2. Calculer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 158 Résoudre et raccorder éventuellement :

1. $xy' - 2y = x^4$.
2. $x(1 + x^2)y' = y$.
3. $(x^2 + 1)y' + (x - 1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1$.
4. $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$.

Exercice 159 Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$.

Exercice 160 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que si :

$$\lim_{x \to \infty} (f'(x) + \alpha f(x)) = 0$$

alors :

$$\lim_{x \to \infty} f'(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Exercice 161 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$,
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$,
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Exercice 162 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' - y = x^3 + x^2$,
2. $y'' - 2y' + y = e^x$,
3. $y'' - 2y' + y = \cos(mx)$ où $m \in \mathbb{R}$,
4. $y'' - 2y' + y = x^3 e^x + 2\cos x + (x^3 + 3)$ (utiliser le principe de superposition).

Exercice 163 On considère l'équation homogène $(E)\quad ay'' + by' + cy = 0$, avec $a \neq 0$. Donner des conditions necessaires et suffisantes liant les coefficients a, b et c dans les deux cas suivants :
(i) toutes les solutions de (E) tendent vers 0 lorsque x tend vers l'infini ;
(ii) toutes les solutions sont périodiques.

Exercice 164 Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6\cos x + 2x \sin x.$$

Exercice 165 Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 4y = 4e^{-2x}$.
2. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^x$.
3. $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$.
4. $y'' + y = e^{-|x|}$.