Exercices d'Analyse (suite)

Exercice 1 Soient $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos(\frac{\pi}{2^k})$ et $v_n = u_n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.
2. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite géométrique. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

Exercice 2 On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1, v_0 = 2, u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n + v_n}, v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer par récurrence que l'on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissent. En déduire qu'elles convergent vers ℓ et ℓ' respectivement. Montrer que l'on a $\ell\ell' = 0$.
3. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire ℓ et ℓ'.

Exercice 3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $0 < u_1 < v_1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

Exercice 4

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}$ converge.

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ, alors $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ. La réciproque est elle vraie ?
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k+1}{2nk+k}$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = \ell$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = \ell$.
4. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite strictement positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n} = \ell$.

Exercice 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!n}$. On rappelle que $e = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. En déduire une valeur approchée de e à $\frac{1}{1000}$.
2. Démontrer que e est irrationnel.

Exercice 7 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $m, n \geqslant N$ alors $|u_n - u_m| < \varepsilon$.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2^p} \geqslant \frac{p+2}{2}$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini.
3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait au critère $\mathcal{C}'$ lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$ alors $|u_n - u_{n+1}| < \varepsilon$. Une suite satisfaisant au critère $\mathcal{C}'$ est-elle de Cauchy ?
4. Montrer que les trois assertions qui suivent sont équivalentes :
   (a) Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et toute partie minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.
   (b) Toute suite de Cauchy est convergente.
   (c) Deux suites adjacentes sont convergentes.

Exercice 8 Soit (u_n) définie par u_0 et u_1 strictement positifs et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $\lim(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ existe et la déterminer. Que remarquez-vous ?
2. Soit $a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
3. Montrer que a_{2n} et a_{2n+1} sont adjacentes.
4. Déterminer un rationnel r tel que $\left| r - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| < 10^{-3}$.

Exercice 9 Déterminer (u_n) telle que

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = i$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$.

Exercice 10 Déterminer les suites bornées qui vérifient $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Exercice 11 Déterminer les suites convergentes qui vérifient $2u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n$.

Exercice 12 Déterminer les suites (u_n) et (v_n) qui vérifient $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n \end{cases}$

Exercice 13 Montrer que la suite $\left(\frac{\sin n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et que la suite $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas.

Exercice 14 Montrer que la suite définie par

$$u_n = 1 + \frac{\cos 1}{1!} + \frac{\cos 2}{2!} + \cdots + \frac{\cos n}{n!}$$

est une suite de Cauchy. En déduire sa convergence.

Exercice 15 Montrer que toute sous-suite extraite d'une suite de Cauchy est aussi une suite de Cauchy.
Montrer que si (u_n) est une suite de Cauchy, on peut trouver une sous-suite (u_{n_k}) de (u_n) telle que :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall q \geqslant p,\ |u_{n_p} - u_{n_q}| \leqslant \frac{1}{2^p}.$$

Exercice 16 Une suite (x_n) est définie par une relation de récurrence $x_{n+1} = a \sin x_n + b$ où a est un nombre réel de $]0,1[$ et b un nombre réel quelconque. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $|x_{p+1} - x_p| \leqslant a^p |x_1 - x_0|$. En déduire que la suite (x_n) est une suite de Cauchy.
Combien de termes faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de $\lim x_n$ à 10^{-10} près si on suppose $a = 1/2$, $b = 5$, $x_0 = 1$?

Exercice 17 Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans lui-même telle que $f(0) = 0$ et pour tout couple (x,y) de $[0,1] \times [0,1]$ on ait $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$.

1. Soit x un élément de $[0,1]$. On pose $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. En déduire que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.
3. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse $f(0) = 0$?

Exercice 18 Soient f et g équivalentes au voisinage de a et strictement positives. Montrer que si f admet en a une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ différente de 1 alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.

Exercice 19 Étudier en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt{x^2+x+1}$.

Exercice 20 Calculer les limites de

1. $\dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0.
2. $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$ en 0.
3. $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0.
4. $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

Exercice 21 Trouver un équivalent simple en $+\infty$ de $(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x})^x - 1$.

Exercice 22

$$\text{Limite en } +\infty \text{ de } \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$$

$$\text{Équivalent en } +\infty \text{ de } \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$$

$$\text{Limite en 0 de } \frac{\tan(ax)-\sin(ax)}{\tan(bx)-\sin(bx)}$$

$$\text{Limite en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\tan(x+\frac{\pi}{4})$$

$$\text{Limite en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \frac{\cos(x)-\sin(x)}{(4\,x-\pi)\tan(x)}$$

$$\text{Équivalent en } 0 \text{ de } \frac{\tan(x - x\cos(x))}{\sin(x) + \cos(x) - 1}$$

$$\text{Équivalent en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \left(\tan(2\,x) + \tan(x + \frac{\pi}{4})\right)\left(\cos(x + \frac{\pi}{4})\right)^2$$

$$\text{Limite en } 0 \text{ de } x^{\frac{1}{1+2\,\ln(x)}}$$

$$\text{Limite en } \frac{1}{2} \text{ de } \left(2\,x^2 - 3\,x + 1\right)\tan(\pi\,x)$$

$$\text{Limite en } 0 \text{ de } \frac{(\sin(x))^{\sin(x)} - 1}{(\tan(x))^{\tan(x)} - 1}$$

$$\text{Équivalent en } +\infty \text{ de } \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})}\ln(\frac{x}{x+1})$$

Exercice 23 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles. Montrer qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) = o(f(t))$ si $t \to \infty$.

Exercice 24 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leqslant x$.

Exercice 25 Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Exercice 26 Étudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée pour les applications suivantes :

1. $f : x \mapsto \sin\,(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
2. $g : x \mapsto x\sin\,(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
3. $h : x \mapsto x^2\sin\,(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 27 Soit g une fonction 2 fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $g(a) = g(b) = 0$ et $g''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer que pour tout $x \in]a, b[, g(x) \geqslant 0$.

Exercice 28 Soit f une application continue de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b]$. Montrer que si $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existe, f est dérivable en a.

Exercice 29 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction bornée deux fois dérivable et telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on ait $\alpha f(x) \leqslant f''(x)$.

1. (a) Montrer que f' a une limite en $+\infty$. Quelle est la valeur de cette limite ?
   (b) Montrer que f est décroissante et que $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$.
2. (a) Soit $g : x \mapsto \alpha f^2(x) - (f'(x))^2$. Montrer que g est croissante et a pour limite 0 en ∞.
   (b) En posant $f(x) = h(x)\exp(-\sqrt{\alpha}x)$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : f(x) \leqslant f(0)\exp(-\sqrt{\alpha}x)$.

Exercice 30 Pour tout n entier supérieur où égal à 2, on considère le polynôme de degré n à coefficients réels :

$$P_n(X) = X^n + X^{n-1} + X^2 + X - 1$$

1. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que P_n a une unique racine réelle positive que l'on nommera λ_n. (On pourra étudier l'application $X \mapsto P_n(X)$.)
2. Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante puis qu'elle converge vers une limite que l'on notera ℓ.
3. Montrer que ℓ est racine du polynôme $X^2 + X - 1$. En déduire sa valeur.

Exercice 31 Soit f une fonction d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivable sur I. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est strictement croissante sur I.
2. f' est positive ou nulle sur I et $\{x \in I; f'(x) > 0\}$ est dense dans I.

Exercice 32

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en 0. Montrer qu'il existe une application ε de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Donner une interprtation géométrique de ce résultat.
2. En déduire les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = (n^3+1)^{\frac{1}{3}} - n$ et $v_n = (1 + \dfrac{\alpha}{n})^{\frac{1}{n}}$.
3. Construire un exemple de suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ avec, $u_n < 1$ pour tout $n \geqslant 1$ et telle que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 1$. (On pourra s'inpirer de l'exemple de $(v_n)_{n\geqslant 1}$ ci-dessus.)

Exercice 33

1. Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\log(n+1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} < 1 + \log(n)$.
3. Posons $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log(n)$ Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroisante et convergente.

Exercice 34 Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré 3 ayant trois racines distinctes. Montrer que les racines de P' sont dans le triangle ayant pour sommet les racines de P

Exercice 35 Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.

Exercice 36 Développements limités en 0 de :

1. $\cos x . \ln(1+x)$ à l'ordre 4.
2. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
3. $\arcsin(\ln(1+x^2))$ à l'ordre 6.
4. $\dfrac{\sinh x - x}{x^3}$ à l'ordre 4.
5. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

Exercice 37 Pour chacune des fonctions suivantes, donner les conditions sur $\varepsilon(x)$ pour que ces fonctions soient des développements limités au voisinage d'un point et à un ordre que vous préciserez.

1. $f_1(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + x^2\varepsilon(x)$
2. $f_2(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^3}\varepsilon(x)$
3. $f_3(x) = (x-2) + \dfrac{(x-2)^2}{5} + (x-2)^3\varepsilon(x)$
4. $f_4(x) = x^2 - x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon(x)$
5. $f_5(x) = x^3 + 3x^- x + 1 + (x-1)^2\varepsilon(x)$
6. $f_6(x) = (x-2)^2 + (x-2) - 2 + (x-2)\varepsilon(x)$
7. $f_7(x) = \{2x + x^2 + 1 + x^2\varepsilon(x)\}\{-x + 3 + x^2 - x^3\varepsilon(x)\}$

Exercice 38

1. Développements limités en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$ et de $g(x) = e^{\sqrt{x}}$
2. Développement limité à l'ordre 3 en $x_0 \in]0;\pi[$ de $h(x) = \ln(\sin x)$. En déduire un développement limité en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 39 Étudier les branches infinies des fonctions :

1. $f(x) = x^2 \arctan(\frac{1}{1+x^2})$.
2. $g(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

Exercice 40 Déterminer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1-\cos 3x)\arctan x}.$$

Exercice 41 Soit g la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Exercice 42 Soient $f : x \mapsto \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$ et $g : x \mapsto (x+1)\exp(\dfrac{1}{x-1})$ deux fonctions. Déterminer si leurs graphes respectifs ont des asymptotes puis la position de ces graphes par rapport à celles-ci.

Exercice 43 Montrer que, pour tout x réel vérifiant $|x| \leqslant 1$:

$$\left|\frac{x + \sin 2x}{x^9 + x^2 - 3}\right| \leqslant 2.$$

Exercice 44 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 45 Soit a un nombre réel et f une application de classe C^2 de $]a,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose f' et f'' bornées ; on pose $M_0 = \sup\limits_{x\geqslant a} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\geqslant a} |f''(x)|$.

1. En appliquant la formule de Taylor en x et $x+2h$, montrer que, pour tout $x > a$ et tout $h > 0$, on a : $|f'(x+h)| \leqslant hM_2 + \dfrac{1}{h}M_0$.
2. En déduire que f' est bornée sur $]a,+\infty[$.
3. Établir le résultat suivant : soit g :$]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 à dérivée seconde bornée et telle que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Alors $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = 0$.

Exercice 46 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P \geqslant 0$. On pose $Q = P + P' + ... + P^{(n)}$. Montrer que $Q \geqslant 0$.

Exercice 47 Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f \in C^3([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(\frac{a+b}{2}) + \dfrac{(b-a)^3}{24}f'''(c)$ (on pourra utiliser Taylor-Lagrange entre $a, \dfrac{a+b}{2}, b$).

Exercice 48 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \cos(nt)f(t)dt = 0$.

Exercice 49 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(a) = f(b) = 0$. Posons $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Montrer que $|\displaystyle\int_a^b f(t)dt| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{4}$. (Indication : faire des développements limités de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ et $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)dt$).

Exercice 50 Soit f continue sur $[0,1]$ avec $f(1) \neq 0$, montrer :

$$\int_0^1 x^n f(t)dt \sim \frac{f(1)}{n}.$$

En déduire :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-2t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

On posera $u = 1 - \frac{1}{n}$ puis $v = ue^{2(u-1)}$.

Exercice 51 Soit f une application C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f + f'' \geqslant 0$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0.$$

Exercice 52 Étudier la fonction :

$$h : x \to \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}.$$

Domaine de définition, continuité et dérivabilité, variations, limites aux bornes de ce domaine, et $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x)}{x}$, éventuellement convexité.

Exercice 53 Soit f une application continue par morceaux de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ possédant une limite ℓ en $+\infty$, telle que $\int_0^\infty f$ existe ; montrer que $\ell = 0$.
Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f$ existe. Montrer que :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 54 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in]0, +\infty[$.

1. En utilisant la concavité du log, montrer que $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.
2. Montrer que $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$.
3. En déduire que $n! \leqslant (\frac{n+1}{2})^n$.

Exercice 55 Soit f une fonction C^2 sur $\mathbb{R}$ convexe croissante et non constante. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f =$ tûûûûûût.

Exercice 56 Soient p et $q \in]0, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que $\forall x, y > 0 \ xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
2. Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$ tels que $\sum\limits_{i=1}^n x_i^p = \sum\limits_{i=1}^n y_i^q = 1$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^n x_i y_i \leqslant 1$.
3. Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$. Montrer l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n y_i^q)^{\frac{1}{q}}$$
4. Soit $p > 1$. En écrivant $(x_i + y_i)^p = x_i(x_i + y_i)^{p-1} + y_i(x_i + y_i)^{p-1}$, montrer l'inégalité de Minkowski :
$$(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^n y_i^p)^{\frac{1}{p}}$$
5. Soit (a_n) une suite strictement positive, $u_n = \sum\limits_{k=1}^n a_k^2$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$. Montrer que si (u_n) converge alors (v_n) aussi.

Exercice 57 Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ convexe.

1. Montrer que f' admet une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
2. En déduire que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$ (on pourra utiliser des ε et une formule de Taylor à l'ordre 1).

Exercice 58 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe majorée. Que dire de f ? Et si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$?

Exercice 59 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^{\mathbb{N}}, u_n = \sum\limits_{k=1}^n a_k^2, v_n = \sum\limits_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$. Montrer que si $(u_n)_n$ converge alors $(v_n)_n$ aussi.

Exercice 60 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, ..., x_n) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n, 1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(1 + \prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 61 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe ou I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, dérivable en $x_0 \in I$ et telle que $f'(x_0) = 0$. Montrer que x_0 minimise f sur I.

Exercice 62 Etudier l'existence des limites suivantes :

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x+y}$;
2. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$.
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$
5. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$

Exercice 63 Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Démontrer que les deux limites itérées

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

n'existent pas, et que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existe et est égale à 0.

Exercice 64 Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0),$$
$$f_1(0,0) = 0.$$
$$f_2(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \qquad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0),$$
$$f_2(0,0) = 0.$$

Exercice 65 Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction suivante :

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.
$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\frac{x}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

6.
$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{\arctan\frac{y}{x}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 66 Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0)\mapsto 0\end{cases}$.
Étudier la continuité de f. Montrer que f est C^1. Calculer les dérivées partielles secondes en $(0,0)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 67 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y)=f(x+y)\qquad h(x,y)=f(x^2+y^2)\qquad k(x,y)=f(xy)$$

Exercice 68 Ecriver la formule de Taylor de second ordre pour chacune des fonctions suivantes au point (x_0,y_0) donné.

1. $f(x,y)=\sin(x+2y)$, $(x_0,y_0)=(0,0)$;
2. $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$;
3. $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}\cos xy$, $(x_0,y_0)=(0,0)$;
4. $f(x,y)=\sin(xy)+\cos(xy)$, $(x_0,y_0)=(0,0)$;
5. $f(x,y)=e^{(x-1)^2}\cos y$, $(x_0,y_0)=(1,0)$.

Exercice 69 Pour chacune des fonctions suivantes etudiez la nature du point critique donné :

1. $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ au point critique $(0,0)$;
2. $f(x,y)=x^2+2xy+y^2+6$ au point critique $(0,0)$;
3. $f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2+xyz$ au point critique $(0,0,0)$;
4. $f(x,y)=x^3+2xy^2-y^4+x^2+3xy+y^2+10$ au point critique $(0,0)$.

Exercice 70 Calculer $I_1=\iint\limits_D (x+y)e^{-x}e^{-y}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x,y\geqslant 0, x+y\leqslant 1\}$.
Calculer $I_2=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2<x, x^2+y^2>y\}$.
Calculer $I_3=\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in[0,1]^2/x^2+y^2\geqslant 1\}$.
Calculer $I_4=\iint\limits_D \frac{1}{y\cos(x)+1}dxdy$ où $D=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{1}{2}]$.
Calculer $I_5=\iiint\limits_D z\,dxdydz$ où $D=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^+)^3/y^2+z\leqslant 1, x^2+z\leqslant 1\}$.
Calculer $I_5=\iint\limits_D xy\,dxdy$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x,y>0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$ avec $a,b>0$.

Exercice 71 Représenter et calculer le volume de $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/-1\leqslant z\leqslant 1, x^2+y^2\leqslant z^2+1\}$.

Exercice 72 Soient, pour $n>0$, $u_n=\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ et $v_n=\ln u_n$.

1. Etudier la serie de terme général w_n où, pour $n \geqslant 2$, $w_n = v_n - v_{n-1}$ et $w_1 = v_1$.
2. En déduire, en utilisant la convergence de la suite des sommes partielles de w_n, que la suite u_n converge vers $\lambda > 0$.
3. Déterminer λ en utilisant la formule de Wallis : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$. En déduire un équivalent de $n!$.

   Indication : Exprimer $n!$ (respectivement $(2n)!$) en fonction de u_n (resp. de u_{2n}) et remplacer-les dans la formule de Wallis.

Exercice 73 Soit $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Donner une valeur approchée de S en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-3}.

Exercice 74 Etudier la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n} \text{ où } a > 0,\ b > 0.$$

Indication : Chercher un équivalent suivant les valeurs de b.

Exercice 75 (Utilisation des règles de Cauchy et d'Alembert) Etudier les séries de termes généraux

1. $$u_n = \sqrt{n!} \sin x \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \cdots \sin \frac{x}{\sqrt{n}} \text{ avec } x > 0.$$
2. $$v_n = e^{an^2}(1 - \frac{a}{n})^{n^3}$$

Exercice 76 (Comparaison à des séries de Riemann et équivalent) Etudier les séries de termes généraux

1. $$u_n = cos(\frac{\pi n^2}{2n^2 + an + 1}) \text{ avec } a > 0$$
2. $$v_n = e^{-\sqrt{n}}$$
3. $$w_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$$

Exercice 77 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, on suppose que $\lim(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}) = 1$ et que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^\beta}) \text{ , où } \alpha > 0 \ \ \beta > 1.$$

On pose $v_n = n^\alpha u_n$. Etudier $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et montrer que (v_n) a une limite finie. Application : Etudier la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n!} \sin 1 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} \cdots \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 78 Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $\dfrac{n!}{n^n}$, $(\operatorname{ch}\sqrt{\ln n})^{-2}$, $n^{-(1+(1/n))}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$, $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$, $n^{lnn}e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 79 Etudier, suivant les valeurs de $p \in \mathbb{N}$, la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!}.$$

Exercice 80 Calculer les sommes des séries suivantes, en montrant leur convergence :

1. $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)3^{-n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{n^4+n^2+1}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{2n-1}{n^3-4n}$

Exercice 81 Soit u_n une suite décroissante à termes positifs. On suppose $(\sum u_n)$ converge. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}(nu_n) = 0.$$

Indication : Encadrer $\sum_{p+1}^{n} u_k$ pour $n > p$. Puis revenir aux définitions des limites avec les epsilons.

Exercice 82 (Examen 2000) En justifiant votre réponse, classer les dix séries $\sum u_n$ suivantes en 4 catégories

– GD : celles telles que u_n ne tend pas vers 0 ;
– ZD : celles qui divergent et telles que $\lim u_n = 0$;
– AC : celles qui convergent absolument ;
– SC : celles qui convergent, mais non absolument.

(Attention : pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple pour montrer que $\sum u_n$ est SC, il faut montrer que $\sum u_n$ converge *et* que $\sum |u_n|$ diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})\right];\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(1-\frac{1}{n})^n\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1000}{3^n+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi n)\sin(\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right).$$

Exercice 83 (Examen 2000)

1. On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)$ et calculer leur somme à l'aide du rappel ci dessus.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^3-k}$et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.
4. L'intégrale impropre $\int_1^{\infty} \frac{dx}{4x^3-x}$ converge t-elle ? Si oui, la calculer.